

П. Я. Носатенко

## ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

P. Ya. Nosatenko

### 3D PROBLEMS OF THE MECHANICS OF ANISOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION

Using the Hamilton—Ostrogradsky principle and concept with respect to predeformed bodies, variational relations and finite-element equations have been formulated for treating 3D problems of initial axisymmetric and geometrically nonlinear deformation, elastic non-axisymmetric equilibrium, stability and natural vibrations of laminated anisotropic (non-orthotropic) shells of revolution made of composite materials. Partially linearized strain relations have been determined for a wide class of problems of geometrically nonlinear non-axisymmetric deformation of thin shells, and replacing general relations, these are valid for the distribution of strain and stress fields and allow to achieve a considerable simplification of the equations of the finite-element method. Using an example of calculation of the stress state, the stability and natural vibrations of a cross-ply double-curved shell as well as the effects of anisotropy have been analysed. The anisotropy effects have appeared to be particularly significant for the stability and vibrations of preloaded shells, where their contribution is two-fold: in the initial cylindrically symmetric state and in the deflected state at vibrations or stability loss.

Упругие композитные пластины и оболочки при произвольной ориентации макроскопически ортотропных слоев в пакете характеризуются существенной анизотропией и неоднородностью напряженно-деформированного состояния (НДС) [1]. Наиболее полный учет всех особенностей поведения таких элементов конструкций возможен лишь на основе решения трехмерных задач теории упругости с привлечением, где это необходимо, геометрически нелинейной постановки. В настоящей работе исходя из принципа Гамильтона—Остроградского и представлений о предварительно деформированном теле [2] получены вариационные формулировки и конечно-элементные соотношения для пространственных задач начального геометрически нелинейного деформирования, неосесимметричного равновесия, устойчивости и свободных колебаний слоистых анизотропных оболочек вращения. На примере рассмотрения НДС, устойчивости и колебаний предварительно нагруженной перекрестно армированной оболочки двоякой кривизны дан анализ эффектов анизотропии.

1. Отнесем оболочку вращения, каждый слой которой обладает общими свойствами цилиндрической анизотропии, к цилиндрическим координатам  $r, \theta, z$ ; механические модели различных типов композитных слоев, фрагмент одного из которых показан на рис. 1, совпадают с принятыми в [1, 3]. НДС оболочки будем характеризовать перемещениями  $u = (u_r, u_\theta, u_z)^T$ , тензором деформаций

$$E = 1/2 (H + H^T + H^T H); \quad |E_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad (1)$$

где компоненты  $H$  и  $H^T$  есть

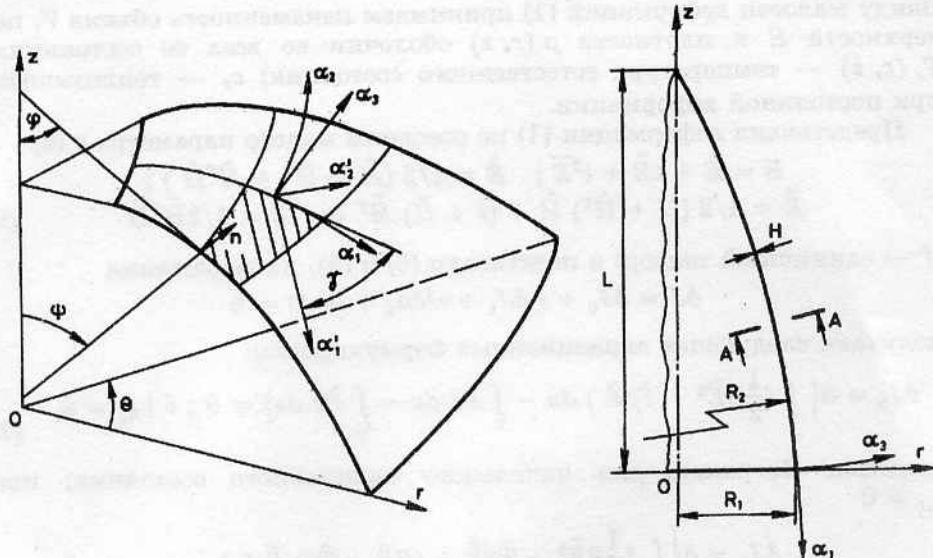


Рис. 1. Схема композитного слоя оболочки вращения в цилиндрической и связанных системах координат.

Fig. 1. A composite layer of a revolution shell in a cylindrical and a conjugated coordinate system.

Рис. 2. Геометрическая схема и размеры оболочки вращения двойкой кривизны.  $L = 1064$  мм;  $R_1 = 355$  мм;  $R_2 = 2383$  мм;  $H = 6$  мм.

Fig. 2. A geometrical scheme and dimensions of a shell of revolution with a double curvature.  $L = 1064$  mm;  $R_1 = 355$  mm;  $R_2 = 2383$  mm;  $H = 6$  mm.

$$H_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta}; \quad \alpha = r, \theta, z; \quad \beta = r, z; \quad H_{z\theta} = \frac{1}{r} u_{z,\theta};$$

$$H_{r\theta} = \frac{1}{r} (u_{r,\theta} - u_\theta); \quad H_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (u_{\theta,\theta} + u_r), \quad (2)$$

а также напряжениями

$$\sigma = BE - T\beta. \quad (3)$$

Здесь  $T$  — приращение температуры относительно предшествующего состояния;  $\beta$  — тензор температурных напряжений при стесненных деформациях. Введем в рассмотрение три состояния: естественное, при котором объемные и поверхностные силы  $F = 0$  и  $P = 0$ , неоднородные кинематические краевые условия отсутствуют,  $T = 0$  и  $u_\alpha = E_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = 0$ ; начальное осесимметричное деформированное состояние, когда  $F = \hat{F}(r, z)$ ,  $P = \hat{P}(r, z)$ ,  $T = \hat{T}(r, z)$ ,  $u|_{s_u} = \hat{u}_s(r, z)$ ,  $\partial \hat{u} / \partial t = 0$  ( $t$  — время); отклоненное состояние

$$u(r, \theta, z, t) = \hat{u}(r, z) + \epsilon \tilde{u}(r, \theta, z, t), \quad (4)$$

вызванное малыми возмущениями воздействий  $\epsilon \tilde{F}$ ,  $\epsilon \tilde{P}$ ,  $\epsilon \tilde{T}(r, \theta, z)$ . Тогда разрешающие соотношения получим из принципа Гамильтона—Остроградского [2] для случая “мертвых” сил и температурных воздействий:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \left\{ \int_V \left( \frac{1}{2} BE^2 - T\beta E - \frac{c_\epsilon T^2}{2T_\epsilon} \right) dv - \right.$$

$$\left. - \int_V F u dv - \int_{S_p} P u ds \right\} - \frac{1}{2} \int_V \rho u_{,t}^2 dv = 0. \quad (5)$$

Ввиду малости деформаций (1) принимаем неизменность объема  $V$ , поверхности  $S$  и плотности  $\rho(r, z)$  оболочки во всех ее состояниях;  $T_e(r, z)$  — температура естественного состояния;  $c_e$  — теплоемкость при постоянной деформации.

Представляя деформации (1) по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (4)

$$\begin{aligned} E &= \hat{E} + \varepsilon \tilde{E} + \varepsilon^2 \bar{E}; \quad \hat{E} = 1/2 (\hat{H} + \hat{H}^T + \hat{H}^T \hat{H}); \\ \tilde{E} &= 1/2 [(I + \hat{H}^T) \tilde{H} + (I + \hat{H}) \tilde{H}^T]; \quad \bar{E} = 1/2 \tilde{H}^T \tilde{H} \end{aligned} \quad (6)$$

( $I$  — единичный тензор) и подставляя (6) в (5), из выражения

$$\delta J = \delta J_0 + \varepsilon \delta J_1 + \varepsilon^2 \delta J_2 + 0(\varepsilon^3) = 0$$

получаем следующие вариационные формулировки:

$$\delta J_0 = \delta \left\{ \int_V \left( \frac{1}{2} B \hat{E}^2 - \hat{T} \beta \hat{E} \right) dv - \int_V \hat{F} \hat{u} dv - \int_{S_p} \hat{P} \hat{u} ds \right\} = 0; \quad \hat{u}|_{S_u} = \hat{u}_s, \quad (7)$$

принцип Лагранжа для начального нелинейного состояния; при  $\tilde{u}_{,t} = 0$

$$\begin{aligned} \delta J_2 = \delta \left\{ \int_V \left[ \frac{1}{2} B \tilde{E}^2 - \tilde{T} \beta \tilde{E} + (B \tilde{E} - \hat{T} \beta) \bar{E} \right] dv - \right. \\ \left. - \int_V \tilde{F} \tilde{u} dv - \int_{S_p} \tilde{P} \tilde{u} ds \right\} = 0; \quad \tilde{u}|_{S_u} = \tilde{u}_s, \end{aligned} \quad (8)$$

принцип максимума приращения энергии для равновесия в отклоненном состоянии при начальном нелинейном НДС (7); при  $\tilde{u}_{,t} = 0$ ,  $\tilde{F} = 0$ ,  $\tilde{P} = 0$ ,  $\tilde{T} = 0$ ,  $\tilde{u}_s = 0$

$$\delta J_2 = \delta \Delta \Theta = \delta \left[ \int_V \left( \frac{1}{2} B \tilde{E}^2 + \hat{\sigma} \bar{E} \right) dv \right] = 0; \quad \tilde{u} \neq 0 \quad (9)$$

энергетический критерий устойчивости начального геометрически нелинейного деформированного состояния [4]; при  $\tilde{F} = 0$ ,  $\tilde{P} = 0$ ,  $\tilde{T} = 0$ ,  $\tilde{u}_s = 0$ ,  $\tilde{u} = \bar{u} \sin(\omega t)$

$$\delta \left[ \int_V \left( \frac{1}{2} B \tilde{E}^2 + \hat{\sigma} \bar{E} \right) dv - \omega^2 \frac{1}{2} \int_V \rho \bar{u}^2 dv \right] = 0; \quad \tilde{H}_{\alpha\beta} = \tilde{H}_{\alpha\beta}(\bar{u}) \quad (10)$$

вариационную постановку задачи свободных колебаний предварительно геометрически нелинейно-деформированной оболочки [в соотношениях (7)...(9) опущены члены, вариация которых равна нулю; считая  $(\dots) = \delta(\dots)$ ,  $E = \delta \tilde{E}$ , при выполнении (7) запишем  $\delta J_1 = 0$ ].

2. Изложенные постановки задач механики упругих слоистых анизотропных оболочек (7)...(10) не отличаются от таковых для тел вращения. Для толстостенных оболочек при значительной изменчивости толщины или структуры вдоль меридиана и при локальном нагружении оболочек использование столь общих соотношений является необходимым и далее не оговаривается. Однако для широкого класса задач механики тонкостенных оболочек при достаточно гладком нагружении ( $\|F/F_{\alpha 1}\| \gg H$ ;  $F \gtrsim P \gtrsim T$ ;  $\alpha_1 \gtrsim \alpha_2$ ;  $H$  — толщина оболочки), когда деформированное состояние (в том числе отклоненное в задачах устойчивости и колебаний) имеет преимущественно изгибный характер, следуя подходу Новожилова [4], общие квадратично-нелинейные деформационные соотношения (1) могут быть частично линеаризованы [5, 6]. Использовать непосредственно уравнения теории деформаций [4...6] для решения задач (7)...(10) не представляется возможным, поскольку первые получены в связанной криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , а задачи (7)...(10) сформулированы в цилиндрических координатах. Для осесимметричной деформации ( $u_{\alpha, \theta} = 0$ ) аналог кинематических соотношений [5, 6] в цилиндриче-

ских координатах получен в [7] и успешно использовался при решении пространственных задач геометрически нелинейного деформирования [3]. Составив группу неравенств [5, 6]

$$|e_{ii}| \ll |\omega_k|, i = 1, 2, 3, k = 1, 2; \left| \frac{1}{2}e_{23} \right| \ll |\omega_1|;$$

$$\left| \frac{1}{2}e_{13} \right| \ll |\omega_2|; \left| \frac{1}{2}e_{12} - \omega_3 \right| \ll |\omega_1|; \left| \frac{1}{2}e_{12} + \omega_3 \right| \ll |\omega_2|; (11)$$

$$e_{ij} = H_{ij} + H_{ji}, i \neq j; e_{ii} = H_{ii}; 2\omega_i = H_{kj} - H_{jk}, i \neq j \neq k, \text{circl},$$

переходя в (11) от связанной к цилиндрической системе координат [7] и рассматривая полученные соотношения при разных значениях угла  $\psi$  (рис. 1), нетрудно установить, что в случае неосесимметричной деформации тонкостенных оболочек вращения в (1) малыми являются удлинения  $u_{r,r}$ ;  $(u_{\theta,\theta} + u_r)/r$ ;  $u_{z,z}$  [их квадратами, взаимными произведениями и произведениями с другими величинами в (1) можно пренебречь], а также произведение  $u_{\theta,z}u_{\theta,r}$  (при  $\psi \rightarrow 0$   $|u_{\theta,r}| \ll |u_{r,z} - u_{z,r}|$ , при  $\psi \rightarrow \pi/2$   $|u_{\theta,z}| \ll |u_{r,z} - u_{z,r}|$ ). Таким образом, учет тонкостенности позволяет в (7)...(10) вместо общих уравнений теории деформации (1), (2) использовать упрощенные:

$$E_{rr} = u_{r,r} + (u_{\theta,r}^2 + u_{z,r}^2)/2;$$

$$E_{\theta\theta} = (u_{\theta,\theta} + u_r)/r + [(u_{r,\theta} - u_{\theta})^2 + u_{z,\theta}^2]/2r^2;$$

$$E_{zz} = u_{z,z} + (u_{r,z}^2 + u_{\theta,z}^2)/2; 2E_{rz} = u_{r,z} + u_{z,r};$$

$$2E_{\theta z} = u_{z,\theta}/r + u_{\theta,z} + u_{r,z}(u_{r,\theta} - u_{\theta})/r;$$

$$2E_{r\theta} = u_{\theta,r} - u_{\theta}/r + u_{r,\theta}/r + u_{z,r}u_{z,\theta}/r.$$
(12)

Для случая наложения малой неосесимметричной деформации на нелинейную осесимметричную [7] компоненты тензора  $\bar{E}$  суть

$$\bar{E}_{rr} = \bar{u}_{r,r} + \frac{\bar{u}_{\theta,r}\bar{u}_{\theta,r}}{r} + \bar{u}_{z,r}\bar{u}_{z,r}; \bar{E}_{\theta\theta} = (\bar{u}_{\theta,\theta} + \bar{u}_r)/r - \frac{\bar{u}_{\theta}(\bar{u}_{r,\theta} - \bar{u}_{\theta})}{r^2};$$

$$\bar{E}_{zz} = \bar{u}_{z,z} + \bar{u}_{r,z}\bar{u}_{r,z}; 2\bar{E}_{\theta z} = \bar{u}_{z,\theta}/r + \bar{u}_{\theta,z} - \frac{\bar{u}_{r,z}\bar{u}_{\theta}}{r} + \bar{u}_{r,z}(\bar{u}_{r,\theta} - \bar{u}_{\theta})/r;$$

$$2\bar{E}_{rz} = \bar{u}_{r,z} + \bar{u}_{z,r}; 2\bar{E}_{r\theta} = \bar{u}_{\theta,r} - \bar{u}_{\theta}/r + \bar{u}_{r,\theta}/r + \bar{u}_{z,r}\bar{u}_{z,\theta}/r, \quad (13)$$

а  $\bar{E}_{\alpha\beta}$  есть нелинейные составляющие (12) ( $\bar{E}_{rz} = 0$ ). Использование (12), (13) вместо (1), (2), (6) в задачах механики тонкостенных оболочек (7)...(10) позволяет существенно упростить разрешающие уравнения и улучшить сходимость итерационных методов решения [8], поэтому является более предпочтительным. Для предварительно осесимметрично деформированных без кручения ортотропных оболочек в (13) следует опустить подчеркнутые слагаемые ( $\bar{u}_{\theta} = 0$ ).

При выполнении условия  $|\bar{H}_{\alpha\beta}| \ll 1$  соотношения (6) переходят в

$$\hat{E} \cong \hat{E}_L = (\hat{H} + \hat{H}^T)/2, \quad \tilde{E} \cong \tilde{E}_L = (\tilde{H} + \tilde{H}^T)/2. \quad (14)$$

В этом случае линейных начальных деформаций возможно введение параметра нагружения  $\lambda$ . Тогда задача устойчивости (9) сводится к обобщенной на собственные значения [8], а вариационные формулировки (8), (10) в явной форме содержат только начальные напряжения. При отсутствии начальных деформаций ( $\lambda = 0$ ) из (8), (10) следуют вариационные формулировки задач статического равновесия и свободных колебаний ненагруженных предварительно оболочек в линейной постановке [1, 9].

3. Решение осесимметричной задачи (7) методом конечных элементов с линейной локальной аппроксимацией поля перемещений

$\hat{u}_{\alpha}^e(r, z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ;  $r, z \in \Omega_e$ ,  $N_e$  — общее количество коль-



цевых конечных элементов  $\Omega_e$  треугольного сечения) реализовано в [3] на основе алгоритма ААМС, использующего метод Ньютона для отыскания с наперед заданной точностью обобщенного вектора перемещений начального состояния  $\hat{U}$  ( $\dim \hat{U} = 3N_p$ ,  $N_p$  — общее количество узлов дискретной модели) из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$[\hat{K}_L - \hat{K}_T] \hat{U} + \hat{k}_N(\hat{U}) = \hat{Q}. \quad (15)$$

Здесь  $\hat{K}_L$  — линейная матрица жесткости;  $\hat{K}_T$  — “температурная матрица жесткости”;  $\hat{k}_N(\hat{U})$  — вектор нелинейных частей связаны с учетом геометрической нелинейности;  $\hat{Q}$  — вектор обобщенных нагрузок от поверхностных и объемных сил и температурных воздействий [3]. В случае малых линейных начальных деформаций (14) вместо (15) имеем  $\hat{U} = \lambda \hat{K}_L^{-1} \hat{Q}$ .

Учитывая периодичность задач (8)...(10) по окружной координате, возможно представление компонент  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\sigma}$  в виде рядов Фурье аналогично тому, как это сделано в [1] для задачи линейной неосесимметричной деформации анизотропных оболочек вращения:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{P}_{rs}^{[n]} \sin(\theta_0 + n\theta) + \tilde{P}_{re}^{[n]} \cos(\theta_0 + n\theta)] ; \\ r \rightleftharpoons z ; r \rightarrow \theta \Rightarrow c \rightleftharpoons s ; \tilde{P} \rightleftharpoons \tilde{F} ; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{T}_s^{[n]} \sin(\theta_0 + n\theta) + \tilde{T}_c^{[n]} \cos(\theta_0 + n\theta)] ; \\ \tilde{u}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_\alpha^{[n]} ; \alpha = r, \theta, z ; \tilde{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}^{[n]} ; \tilde{E} \rightleftharpoons \tilde{\sigma} , \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_r^{[n]} = v_r^{[n]}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) + w_r^{[n]}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) , \quad r \rightleftharpoons z ; \\ u_\theta^{[n]} = v_\theta^{[n]}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) + w_\theta^{[n]}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) , \end{aligned} \quad (17)$$

а компоненты тензоров  $\tilde{E}^{[n]}$  и  $\tilde{\sigma}^{[n]}$  суть

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{rr}^{[n]} = \tilde{e}_{rr}^{[n]}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) + \tilde{g}_{rr}^{[n]}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) , \\ rr \rightleftharpoons \theta\theta \rightleftharpoons zz \rightleftharpoons rz ; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\theta z}^{[n]} = \tilde{e}_{\theta z}^{[n]}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) + \tilde{g}_{\theta z}^{[n]}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) , \\ \theta z \rightleftharpoons r\theta ; \tilde{E} \rightarrow \tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{e} \rightarrow \tilde{\tau} , \tilde{g} \rightarrow \tilde{t} . \end{aligned}$$

Заметим, что в случае ортотропной оболочки, у которой для каждого слоя направления ортотропии совпадают с осями координат,

$$\tilde{\tau}^{[n]} = B \tilde{e}^{[n]} + \beta \tilde{T}_s^{[n]} ; \quad \tilde{t}^{[n]} = B \tilde{g}^{[n]} = \beta \tilde{T}_c^{[n]} . \quad (19)$$

При учете анизотропии более общего вида, чем криволинейная ортотропия, равенства типа (19) невозможны, поскольку как  $\tilde{\tau}$ , так и  $\tilde{t}$  связаны посредством соотношений (3) и с  $\tilde{e}$  и с  $\tilde{g}$ . Для компонент  $\tilde{E}$  также возможно представление в виде тригонометрического ряда, который ввиду громоздкости здесь не приводится.

Подставляя (16)...(18) в (8)...(10), задаваясь линейной локальной аппроксимацией  $v_\alpha^{[n]}(r, z)$  и  $w_\alpha^{[n]}(r, z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) [1, 8, 9], выполняя интегрирование с учетом ортогональности тригонометрических функций и переходя в (8)...(10) от варьирования к дифференцированию по компонентам обобщенного вектора узловых перемещений

$$\tilde{U}^{[n]} = [v_{r1}^{[n]}, v_{\theta1}^{[n]}, v_{z1}^{[n]}, w_{r1}^{[n]}, w_{\theta1}^{[n]}, w_{z1}^{[n]}, \dots, w_{2N_p}^{[n]}]^T, \dim \tilde{U}^{[n]} = 6N_p,$$

для каждого  $n$  в разложениях (16)...(18) получаем совокупность конечно-элементных разрешающих уравнений для задач отклоненного напряженно-деформированного состояния

$$[\tilde{K}^{[n]}(\hat{U}) + \tilde{G}^{[n]}(\hat{U})] \tilde{U}^{[n]} = \tilde{Q}^{[n]}, \quad (20)$$

устойчивости —

$$[\tilde{K}_L - \tilde{K}_T] \hat{U} + \hat{k}_N(\hat{U}) = \hat{Q}, [\tilde{K}^{[n]}(\hat{U}) + \tilde{G}^{[n]}(\hat{U})] \tilde{U}^{[n]} = 0; \tilde{U}^{[n]} \neq 0 \quad (21)$$

и свободных колебаний —

$$\{[\tilde{K}^{[n]}(\hat{U}) + \tilde{G}^{[n]}(\hat{U})] - (\omega^{[n]})^2 M\} \tilde{U}^{[n]} = 0, \quad \tilde{U}^{[n]} \neq 0 \quad (22)$$

при начальном геометрически нелинейном НДС (7). Здесь

$$\tilde{K}_{ij}^{[n]}(\hat{U}) = 1/2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{U}_i^{[n]} \partial \tilde{U}_j^{[n]}} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} (\tilde{\tau}^{[n]} \tilde{\epsilon}^{[n]} + \tilde{\tau}^{[n]} \tilde{g}^{[n]}) r dr dz - \quad (23)$$

симметричная положительно определенная матрица жесткости, в силу (6) зависящая от перемещений начального состояния;

$$\tilde{G}_{ij}^{[n]}(\hat{U}) = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{U}_i^{[n]} \partial \tilde{U}_j^{[n]}} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} \hat{\sigma}(\tilde{\epsilon}^{[n]} + \tilde{g}^{[n]}) r dr dz - \quad (24)$$

симметричная геометрическая матрица (матрица начальных напряжений), нелинейно зависящая от компонент начальных перемещений  $\hat{U}$ ;  $M$  — постоянная симметричная положительно определенная матрица масс [9]; компоненты тензоров  $\tilde{\epsilon}$  и  $\tilde{g}$  для общих соотношений (6) суть

$$\begin{aligned} 2\tilde{\epsilon}_{rr} &= (v_{r,r}^2 + v_{\theta,r}^2 + v_{z,r}^2); \quad 2\tilde{\epsilon}_{zz} = (v_{r,z}^2 + v_{\theta,z}^2 + v_{z,z}^2); \quad \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{g} \Rightarrow v \rightarrow w; \\ 2\tilde{\epsilon}_{\theta\theta} &= 1/r^2 [(nv_r - v_{\theta})^2 + (v_r - nv_{\theta})^2 + (nv_z)^2]; \\ 2\tilde{\epsilon}_{\theta z} &= 1/r [w_{r,z} (nv_r - v_{\theta}) + w_{\theta,z} (v_r - nv_{\theta}) + nv_z w_{z,z}]; \\ 2\tilde{\epsilon}_{rz} &= \underline{v_{r,r} v_{r,z} + v_{\theta,r} v_{\theta,z} + v_{z,r} v_{z,z}}, \quad \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{g} \Rightarrow v \rightarrow w; \\ 2\tilde{\epsilon}_{r\theta} &= 1/r [\underline{w_{r,r} (nv_r - v_{\theta}) + w_{\theta,r} (v_r - nv_{\theta}) + nv_z w_{z,r}}]; \\ 2\tilde{g}_{\theta\theta} &= 1/r^2 [(nw_r + w_{\theta})^2 + (w_r + nw_{\theta})^2 + (nw_z)^2]; \\ 2\tilde{g}_{\theta z} &= 1/r [-v_{r,z} (nw_r + w_{\theta}) + \underline{v_{\theta,z} (w_r + nw_{\theta}) - nw_z v_{z,z}}]; \\ 2\tilde{g}_{r\theta} &= 1/r [\underline{-v_{r,r} (nw_r + w_{\theta}) + v_{\theta,r} (w_r + nw_{\theta}) - nw_z v_{z,r}}]. \end{aligned} \quad (25)$$

При учете тонкостенности оболочки (12), (13) в (25) подчеркнутые члены следует положить равными нулю (индекс  $[n]$  в (25) опущен).

В случае малых линейных начальных деформаций (14), (19) матрицу  $\tilde{K}^{[n]}(\hat{U})$  (23) в соотношениях (20)...(22) следует заменить на линейную матрицу жесткости  $\tilde{K}_L^{[n]}$  [1], а в соотношениях для геометрической матрицы (24) начальные напряжения определять по линейной зависимости  $\hat{\sigma} = \lambda [1/2B(\hat{H} + \hat{H}^T) - \hat{T}\beta]$  [такую матрицу обозначим как  $\tilde{G}_L^{[n]}(\hat{U})$ ].

Для ортотропных оболочек при отсутствии кручения в начальном состоянии в силу (19) задачи по определению  $v_{\alpha}^{[n]}(r, z)$  и  $w_{\alpha}^{[n]}(r, z)$  (17) являются независимыми, что позволяет снизить размерность разрешающих уравнений (20)...(22) вдвое [1, 8, 9]. В ряде случаев это дает возможность облегчить анализ эффектов анизотропии: если пренебрежение анизотропией (расчет по ортотропной модели) приводит к появлению лишь перемещений  $\tilde{v}_{\alpha}^{[n]}(r, z)$  и связанных с ними деформаций  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}^{[n]}(r, z)$  и напряжений  $\tilde{\tau}_{\alpha\beta}^{[n]}(r, z)$  (которые будем называть "основ-

**Собственные частоты колебаний оболочки, нагруженной  
внешним давлением  $p = 0,5$  МПа**

Номер тона	Анизотропная оболочка		Ортотропная оболочка	
	Частота, Гц	$n$	Частота, Гц	$n$
1	128,1 (254,9)	5 (3)	213,5 (272,7)	3 (1)
2	129,3 (257,6)	4 (2)	217,8 (275,0)	4 (2)
3	167,6 (272,6)	3 (1)	248,7 (283,6)	2 (3)
4	177,1 (282,3)	6 (4)	264,3 (327,8)	5 (4)
5	227,8 (331,8)	2 (5)	270,3 (400,3)	1 (5)
6	261,4 (401,9)	7 (6)	349,2 (498,8)	6 (6)
7	270,4 (477,4)	1 (4)	464,7 (530,5)	7 (3)
8	385,0 (486,8)	5 (3)	464,8 (540,2)	4 (4)
9	386,0 (491,2)	4 (7)	485,5 (546,2)	3 (0)

Примечание. В скобках указаны значения частот и количество волн в окружном направлении для колебаний ненагруженной оболочки [9].

ными”), то вклад анизотропии характеризуется величинами “дополнительных” перемещений  $\tilde{w}_a^{[n]}(r, z)$ , деформаций  $\tilde{g}_{\alpha\beta}^{[n]}(r, z)$  и напряжений  $\tilde{\tau}_{\alpha\beta}^{[n]}(r, z)$ , связанными в таких задачах только с учетом анизотропии.

4. Анализ влияния анизотропии на напряженное состояние, устойчивость и свободные колебания проведем для жестко заделанной по торцу стеклопластиковой перекрестно армированной под углами  $\gamma^{(1, 2)} = \pm 60^\circ$  оболочки (рис. 2) для двух предельных случаев: двухслойного анизотропного композита со слоями равной толщины  $H/2$  и макроскопически однородного ортотропного композита. Механическая модель однонаправленно армированного слоя, характеристики связующего и наполнителя, объемное содержание волокон и плотность стеклопластика совпадают с принятыми в [3, 9]. В начальном состоянии оболочка нагружена по боковой поверхности внешним давлением  $p = 0,5$  МПа. Начальное НДС при аналогичном нагружении достаточно подробно рассмотрено в [8]. Заметим лишь, что влияние анизотропии здесь не является малым: сдвиговые напряжения  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ , равные нулю для ортотропной оболочки, весьма существенны (см. рис. 3 работы [8]).

Отметим, что дальнейший анализ возможно проводить без учета геометрической нелинейности начального состояния: различия линейного и нелинейного решений составляют менее 1% (на это указывают и большие значения давлений, соответствующих потере устойчивости по осесимметричной форме:  $p_{ан}^* = 10,13$  МПа для анизотропной оболочки и  $p_{орт}^* = 10,41$  МПа — для ортотропной).

Решение линеаризованной задачи устойчивости для данной оболочки выполнено в [8], где показано, что неучет анизотропии дает завышение расчетного значения критического внешнего давления на 58%:  $p_{ан}^* = 0,586$  МПа и  $p_{орт}^* = 0,929$  МПа (в обоих случаях реализуется форма потери устойчивости с пятью волнами в окружном направлении,  $n = 5$ ).

Таким образом, значение давления предварительного нагружения  $p = 0,5$  МПа близко к критическому для анизотропной оболочки и почти вдвое ниже критического при рассмотрении ее как макроскопически однородной ортотропной, что в значительной мере сказывается на расчетных значениях динамических характеристик. Результаты определения частот и форм колебаний нагруженной оболочки представлены в таблице и на рис. 3. Здесь пренебрежение анизотропией приводит к завышению значений частот уже более чем

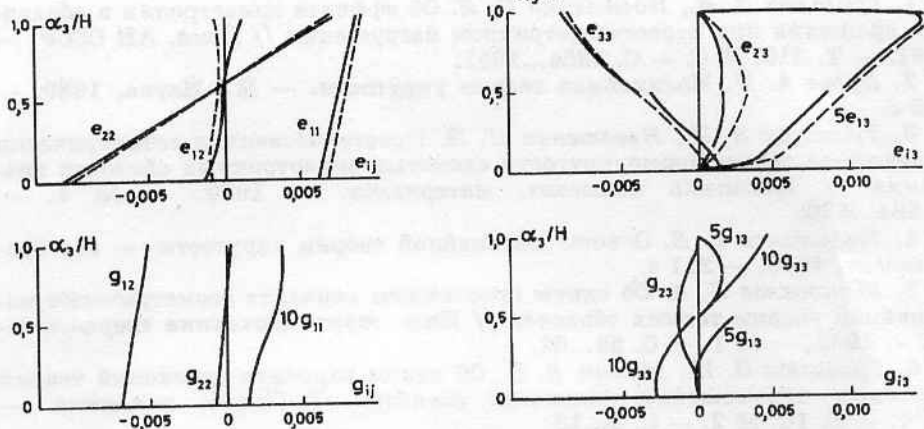


Рис. 3. Распределение амплитуд деформаций отклоненного состояния при колебаниях для анизотропной (—) и ортотропной (---) оболочек в сечении А—А (по рис. 2).

Fig. 3. Distribution of strain amplitudes of a deflected state at vibrations of an anisotropic (—) and an orthotropic (---) shell in the cross-section A—A (according to Fig. 2).

на 65%, что является недопустимым даже для оценочных расчетов. Низший тон колебаний анизотропной оболочки реализуется при количестве волн в окружном направлении  $n = 5$ , как и при потере устойчивости. Как было отмечено в [9], особенностью изгибных колебаний анизотропной оболочки в отличие от ортотропной является наличие “закручивания”: происходит сдвиг максимальных прогибов на угол  $\theta_*$ , меняющийся вдоль оси. Для предварительно нагруженной анизотропной оболочки форма первого тона колебаний близка к форме потери устойчивости (см. [8], рис. 2). В ходе анализа деформированного состояния при колебаниях (см. рис. 3) установлено, что основные различия результатов двух подходов заключаются в “навязанном” ортотропной моделью отсутствии весьма существенных составляющих деформаций  $g_{ij}$ , достигающих максимальных значений в сечениях, отстающих на угол  $\theta = \pi/2n$  от сечений с амплитудными значениями  $e_{ij}$ , что физически эквивалентно завышению жесткости оболочки.

Таким образом, наиболее значительно пренебрежение анизотропией сказывается в задачах устойчивости и колебаний предварительно нагруженной внешним давлением оболочки, где ее влияние двояко: на начальное НДС и, следовательно, на характер и значения компонент матрицы начальных напряжений  $\tilde{G}_L^{[n]}(\hat{U})$ ; на неосесимметричное деформирование при колебаниях или потере устойчивости, математически определяемое матрицей жесткости  $\tilde{K}_L^{[n]}$  (в [1] показано, что влияние анизотропии на НДС при неосесимметричном нагружении намного превышает таковое в случае осесимметричной деформации).

В заключение отметим, что впервые на основе пространственного подхода в рамках единого математического обеспечения, базирующегося на методе конечных элементов, дан комплексный анализ эффектов, связанных с анизотропией (неортотропией) упругих свойств композитных оболочек в задачах статического равновесия, устойчивости и свободных колебаний. Полученные результаты свидетельствуют о недопустимости применения ортотропной модели при расчетах произвольным образом армированных оболочек без надлежащего обоснования.



# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Об эффекте анизотропии в оболочках вращения при неосесимметричном нагружении // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 6. — С. 1354...1357.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
3. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов. — 1989. — № 4. — С. 684...690.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 211 с.
5. Шаповалов Л. А. Об одном простейшем варианте геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1968. — № 1. — С. 56...62.
6. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений непологих оболочек // Прикл. механика. — 1974. — Т. 10, № 2. — С. 3...13.
7. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Простейший вариант нелинейных деформационных соотношений в цилиндрических координатах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1985. — № 1. — С. 75...78.
8. Носатенко П. Я., Омельченко М. Е. Трехмерный анализ устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения из композитных материалов // Механика композит. материалов. — 1992. — № 4. — С. 499...507.
9. Носатенко П. Я., Омельченко М. Е. Численное решение пространственной задачи свободных колебаний слоистых анизотропных оболочек вращения из композитных материалов // Механика композит. материалов. — 1991. — № 5. — С. 861...868.

Научно-производственное объединение  
машиностроения, Московская обл.

Поступила в редакцию 24.08.92  
Окончательный вариант поступил 30.12.92  
Received Aug. 24, 1992 (Dec. 30, 1992)